ΛΥΣΕΙΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2002

Θέμα 1^{o}

Α. α) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 217

β) Θεωρία : $y - f(x_o) = f(x_o)(x - x_o)$

Β. α) Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 104

β) 3)

Θέμα 2^{o}

α)

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{3+4i}{1-2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-5+10i}{5} = -1 + 2i \quad \text{άρα } x = -1 \text{ και } y = 2$$

β)

Αφού ο $w = -1 + 2i$ είναι ρίζα , τότε και ο $\bar{w} = -1 - 2i$ θα είναι επίσης ρίζα.
Από τους τύπους του Vieta έχουμε

$$w_1 + w_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow -1+2i-1-2i = -\frac{\beta}{1} \Leftrightarrow \beta = 2$$

$$w_1 \cdot w_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow (-1+2i)(-1-2i) = \frac{2\gamma}{1} \Leftrightarrow 2\gamma = 5 \Leftrightarrow \gamma = \frac{5}{2}$$

γ)

$$|z - 2z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z - (2-4i)| = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow |z - (2-4i)| = 5$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με κέντρο $K(2,\ -4)$ και ακτίνα $\rho = 5$.

Θέμα 3^{o}

α)

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Είναι $f(0) = \frac{17}{4}$, άρα η C_f τέμνει τον άξονα των y στο σημείο $A\left(0\ ,\ \frac{17}{4}\right)$

Επίσης $f'(x) = 2 - \frac{2}{(2x+4)^2}$, οπότε $f'(0) = 2 - \frac{2}{16} = \frac{15}{8}$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = \frac{15}{8}x + \frac{17}{4}$

β)

Κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)= \lim_{x\to-2^+}\left(2x+4+\frac{1}{2x+4}\right)= 0 + (+\infty) = +\infty$$

Άρα η ευθεία $x=-2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Πλάγιες – οριζόντιες

$f(x) = 2x + 4 + \dfrac{1}{2x+4} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) - (2x + 4) = \dfrac{1}{2x+4}$

Οπότε $\quad \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(2x+4))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{2x+4}=0$

Άρα η ευθεία $y = 2x + 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη και στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

γ)

Στο διάστημα $[0,\ 1]$ η f είναι συνεχής και $f(x) > 0$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν

είναι $\quad E=\displaystyle\int_0^1\left(2x+4+\frac{1}{2x+4}\right)dx=\left[x^2+4x+\frac{1}{2}\ln|2x+4|\right]_0^1=5+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$ τ. μ

Θέμα 4ο

α)

Είναι $\quad h'(x) = \dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=$

$= \dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}=$ (από υπόθεση)

$= \dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}>0$, $x\in(0\ ,+\infty)$, $\quad$ Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα

β)

$h'(x)=\dfrac{1}{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad h'(x)=\left(-\dfrac{1}{x}\right)'$

$h(x) = -\dfrac{1}{x} + c$

$\dfrac{f(x)}{x^2}= -\dfrac{1}{x} + c$

Για $x = 1$ έχουμε $f(1) = -1 + c \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -1 + c \quad \Leftrightarrow \quad c = 1$

Οπότε $\quad \dfrac{f(x)}{x^2}= -\dfrac{1}{x}+1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = -x + x^2$, $x > 0$

γ)

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)dt}{(\ln x)^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{\left(\int_1^x f(t)dt\right)'}{\left((\ln x)^2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{xf(x)}{2\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x(-x+x^2)}{2\ln x} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-x^2+x^3}{2\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\left(-x^2+x^3\right)'}{\left(2\ln x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-2x+3x^2}{\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$